Curso 2013-2014

LÓGICA – Examen de recuperación de lógica proposicional **13-01-2014**

1.1. Formalizar en el lenguaje de la lógica proposicional el siguiente razonamiento: *(2,5 puntos)*

Es necesario que estudie para aprobar, pero sólo si estudio y domino la asignatura sacaré buena nota.

- Símbolos de enunciado:
  - estudio: p
  - apruebo: q
  - domino la asignatura: r
  - saco buena nota: s

- *Es necesario que estudie para aprobar :*

  p q

  p es necesario para q ó

  si q necesariamente p $\Rightarrow$ $\boxed{q \rightarrow p}$

- *sólo si estudio y domino la asignatura sacaré buena nota :*

  p r s

  si $(p \wedge r)$ entonces s es $(p \wedge r) \rightarrow s$

  $\Rightarrow$ sólo si $(p \wedge r)$, s será $\boxed{s \rightarrow (p \wedge r)}$

- *pero*: $\wedge$

$\Rightarrow$ $\boxed{(q \rightarrow p) \wedge (s \rightarrow (p \wedge r))}$

1.2. Decir si las siguientes afirmaciones son verdaderas (V) o falsas (F). Si la respuesta es negativa decir por qué, y si es afirmativa escribir la correspondiente definición o teorema.

a) *Una fórmula bien formada A se dice que es contingente si existe al menos un contramodelo de dicha fórmula A.*
b) *Si existe un modelo del conjunto de fórmulas {A1, A2, …, An} y también de la fórmula B, podemos afirmar que B es consecuencia lógica de {A1, A2, …, An}.*
c) *Si $A1 \wedge A2 \wedge \ldots \wedge An \wedge \neg B$ es insatisfacible, podemos afirmar que B es consecuencia lógica de {A1, A2, … , An}.*
d) *Un sistema de cálculo deductivo es válido si para toda fórmula A tal que $\models A$, existe una prueba en dicho cálculo ($\vdash A$).*

1.- Falsa. Una fórmula es contingente cuando puede ser verdadera o falsa, es decir, cuando tiene al menos un modelo **y** al menos un contramodelo.

2.- Falsa. No basta que haya un modelo de A1, A2, …, An que también lo sea de B. **Todos** los modelos de A1, A2, …, An tienen que serlo de B.

3.- Verdadera. Hay un teorema que dice

$$A1, A2, \ldots , An \models B \quad \text{sii} \quad A1 \wedge A2 \wedge \ldots \wedge An \wedge \neg B \text{ es insatisfacible}$$

4.- Falso. Es al revés. Lo que se afirma en el anterior enunciado es el teorema de completud. El teorema de validez dice que si $\vdash A$, A es deducible, entonces $\models A$, A es válida.

2. Analizar si hay consecuencia lógica entre las premisas y la conclusión del siguiente argumento. Justificar debidamente la respuesta. *(2,5 puntos)*

$$\{ q \rightarrow \neg r,\ t \rightarrow p \wedge s,\ \neg s \} \vDash q \wedge r \rightarrow t$$

Intentamos encontrar una interpretación que sea **modelo de todas las premisas** y, a la vez, **contramodelo de la conclusión.**

Es decir, la I que buscamos debería tener las siguientes propiedades:

(1): $I(q \rightarrow \neg r)$ = verdadero, (2): $I(t \rightarrow p \wedge s)$ = verdadero, (3): $I(\neg s)$ = verdadero, (4): $I(q \wedge r \rightarrow t)$ = falso

Queremos que las cuatro condiciones (1), (2), (3) y (4) se den **a la vez**. Vamos a ver si esto es posible.

La condición (1) es equivalente a la **disyunción** entre (1.1): I(q) = falso y (1.2): I(r) = falso.

La condición (2) es equivalente a la **disyunción** entre (2.1): I(t) = falso y (2.2): $I(p \wedge s)$ = verdadero. A su vez, (2.2) es equivalente a la **conjunción** entre (2.2.1): I(p) = verdadero y (2.2.2): I(s) = verdadero.

La condición (3) es equivalente a (3.1): I(s) = falso.

La condición (4) es equivalente a la **conjunción** entre (4.1): $I(q \wedge r)$ = verdadero y (4.2): I(t) = falso. A su vez, (4.1) es equivalente a la **conjunción** entre (4.1.1): I(q) = verdadero y (4.1.2): I(r) = verdadero.

Hay varios caminos hacia la solución; vamos a ver uno de ellos.
Para obtener nuestro objetivo es imprescindible que se dé (4), es decir, que se den a la vez (4.1) y (4.2); al ser (4.1) equivalente a una conjunción, lo que necesitamos es que tanto (4.1.1) como (4.1.2) se den.
Resumiendo, se tiene que dar a la vez las tres condiciones (4.1.1), (4.1.2) y (4.2); es decir, la I que buscamos sería tal que I(q) = verdadero, I(r) = verdadero e I(t) = falso.

Sin embargo, una entre (1.1) y (1.2) tiene que darse, pero (1.1) contradice (4.1.1) y (1.2) contradice (4.1.2), por lo que ninguna de las dos es compatible con la condición (4).
(NOTA: Que sólo una de las dos fuera incompatible no era suficiente porque hay una disyunción entre (1.1) y (1.2).

Ya hemos visto que es imposible tener a la vez las condiciones (1) y (4).
Ni siquiera hace falta considerar (2) y (3) (es decir, la segunda y la tercera premisa) porque ya sabemos que **sí hay consecuencia lógica**.

3. Demostrar la siguiente deducción mediante deducción natural justificando cada paso:

$$T\ [\ \neg p \vee q\ ,\ q \vee r \rightarrow s\ ,\ \neg r \rightarrow p\ ] \vdash s$$ *(2,5 puntos)*

1.	$\neg p \vee q$	premisa
2.	$q \vee r \rightarrow s$	premisa
3.	$\neg r \rightarrow p$	premisa
4.	$\neg\neg r \vee p$	Teorema de Intercambio con la equivalencia $A \rightarrow B \Leftrightarrow \neg A \vee B$
5.	$r \vee p$	Teorema de Intercambio con la equivalencia $A \Leftrightarrow \neg\neg A$
6.	$q \vee r$	Regla derivada de corte 1,5
7.	s	Modus Ponens 2,6

4.1. Pasar a forma clausular, indicando cada paso, la siguiente argumentación: *(2,5 puntos)*

$$\{ q \rightarrow \neg p , \neg(p \wedge r) \rightarrow q , p \rightarrow \neg(q \rightarrow r) \} \vDash r \vee s$$

1. $q \rightarrow \neg p$
2. $\neg q \vee \neg p$

1. $\neg(p \wedge r) \rightarrow q$
2. $\neg\neg(p \wedge r) \vee q$
3. $(p \wedge r) \vee q$
4. $(p \vee q) \wedge (r \vee q)$

1. $p \rightarrow \neg(q \rightarrow r)$
2. $p \rightarrow \neg(\neg q \vee r)$
3. $\neg p \vee \neg(\neg q \vee r)$
4. $\neg p \vee (\neg\neg q \wedge \neg r)$
5. $\neg p \vee (q \wedge \neg r)$
6. $(\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg r)$

1. $\neg (r \vee s)$
2. $\neg r \wedge \neg s$

FC = $\{ \neg q \vee \neg p , p \vee q , r \vee q , \neg p \vee q , \neg p \vee \neg r , \neg r , \neg s \}$

4.2. Decidir por resolución básica, si el siguiente conjunto de cláusulas es insatisfacible:

$$\{p \vee q,\ r \vee \neg s,\ s,\ \neg p \vee \neg r,\ \neg q \vee \neg r\}$$

1. r V ¬s, s => r
2. r, ¬q V ¬r => ¬q
3. ¬q, p V q => p
4. p, ¬p V ¬r => ¬r
5. ¬r, r => □